

Genel Matematik 1

Ders Notları



Infinity Team Tarafından Yazıldı

Öncelikle bu kitapçığı tamamladığınız için elhamdülillah

Bu notları, öğrencilerin Genel matematik 1 dersini tamamlamalarına ve üniversite eğitimlerini daha iyi tamamlamalarına yardımcı olmak amacıyla, 2020 yılından bu yana üniversite matematik derslerinde edindiğimiz tecrübeye dayanarak yazdık ve her zaman başarılar dileriz.

Infinity Teams:

Genel Matematik 1

Genel Matematik 2

Diferansiyel Denklemler

Lineer Cebir

Takım üyeleri:

Eng.Abdulrahman Hamdi (Bilgisayar Mühendisliği)

Temel Kavramlar

2. Dereceden denklemler

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$(mx+n)(px+r) = 0$$

$$n \cdot r = c \quad \text{ve} \quad n+r = b$$

$$\text{örnek: } x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\neq x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x+4)(x+1) = 0$$

$$(x-9)(x+1) = 0$$

$$\neq 3x^2 - 11x + 4 = 0$$

$$\neq 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\left(\frac{x-12}{3}\right) \left(\frac{x+1}{3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{x-6}{2}\right) \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$$

$$(x-4)(3x+1) = 0$$

$$(x-3)(2x+1) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

1) $\Delta < 0$ gerçekte sayılar kümesinde kökü yoktur

$$\text{ör: } x^2 + 5x + 12 = 0 \quad \text{Ç.k} = ?$$

$$25 - 4(1)(12) = 25 - 48 = -23 < 0 \quad \text{Ç.k} = \emptyset$$

2) $\Delta = 0$ tek kökü (çakışık iki kökü) vardır

$$(a^2 - 2ab + b^2) = (a-b)^2$$

$$\text{veya Formül } r = x_0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) = (a+b)^2$$

$$\text{ör: } x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \text{Ç.k} = \{3\} \quad r = x_0 = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

$$(x-3)^2 = 0$$

3) $\Delta > 0$ birbirinden farklı iki gerçekte kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{ör: } x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 12 = 52 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{52}$$

$$x_1 = \frac{+8 + \sqrt{52}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{+8 - \sqrt{52}}{2}$$

$$\text{Not: } 1) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2) \quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$2) \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Temel Kavramlar

2. Dereceden eşitsizlikler

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

1) $\Delta > 0$ farklı iki gerçekte kökü vardır

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	a 'nın işaretinin aynısı	a 'nın işaretinin tersi	a 'nın işaretinin aynısı	

2) $\Delta = 0$ farklı iki gerçekte kökü vardır (tek kök)

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$f(x)$	a 'nın işaretinin tersi	a 'nın işaretinin aynısı	

Not: Farklı iki kökü
varsa tabloda ($\emptyset$)
şeklinde belirtilir

3) $\Delta < 0$ gerçekte kökü yoktur

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	a 'nın işaretinin aynısı	

INFINITY TEAM
Since 2020

ör: $x^2 - 3x - 10 < 0$ $\xi \cdot k = ?$

$$(x - 5)(x + 2) < 0$$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	

$$\xi \cdot k = (-2, 5)$$

* ör: $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ $\xi \cdot k = ?$

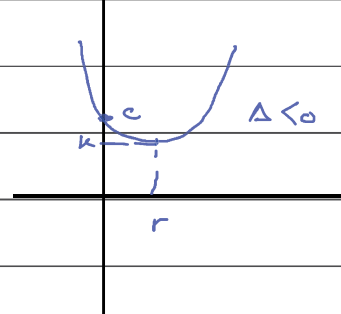
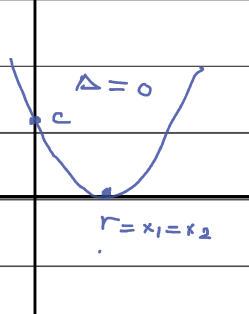
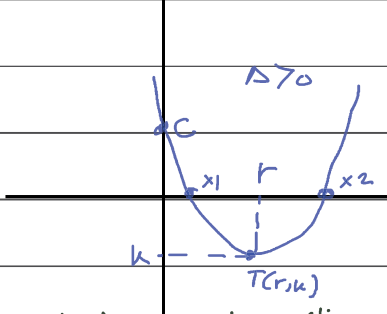
$$(x - 2)^2 \geq 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\emptyset$	$+$

$$(-\infty, +\infty) \setminus \{2\}$$

2. Dereceden grafik (parabol):

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$



* parabolün nasıl çizilir:

1) $a > 0 \Rightarrow \cup$ iğne eğrinin kolları yukarı doğru

$a < 0 \Rightarrow \cap$ " " " " a aşağı "

2) $y = x^2 + 5x + 6$

$y = 0$ için x_1 ve x_2 bulma $\Rightarrow y = 0$ için $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$

$x = 0$ için y bulma $\Rightarrow x = 0$ için $y = 6$

$x_1 = -2$
 $x_2 = -3$

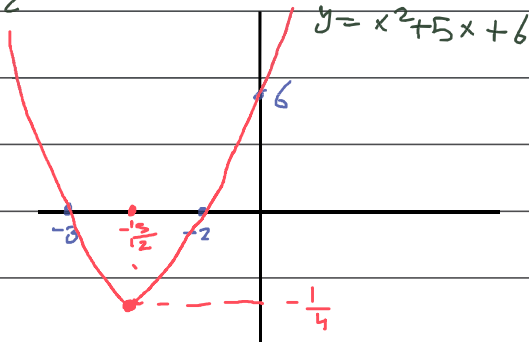
3) Tere noktası bulma: $T(r, k)$

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(r)$$

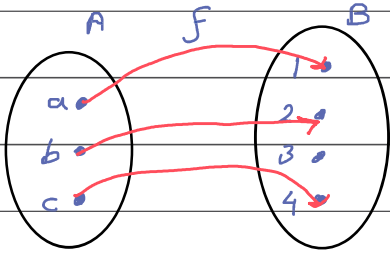
$$r = -\frac{5}{2} \Rightarrow k = f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} \cdot 5 + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25 \cdot 2}{2 \cdot 2} + 6 = \frac{25}{4} - 25 + 6 = -\frac{1}{4}$$

$$T\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

4) grafik çiziniz



$a = 1 > 0 \quad \cup$



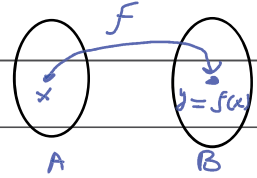
Tanım
kümesi

Değer kümesi

$$f: A \rightarrow B$$

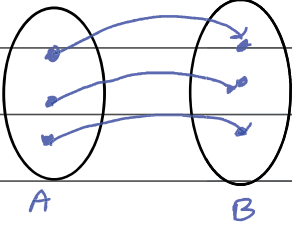
$$a \in A \text{ için } f(a) \in B$$

$f(A)$ görüntü kümesi



Fonksiyon çeşitleri:

1) **örten fonksiyon**: görüntü kümesi değer kümesine eşit

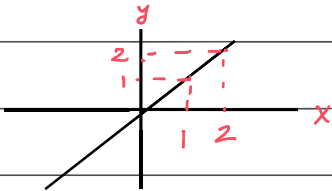


ve örten olmayan fonksiyon da içine fonksiyondur

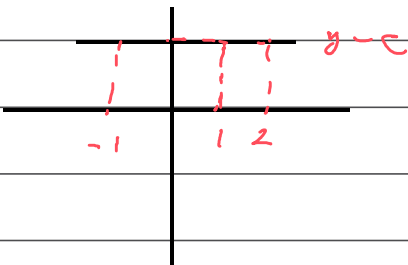
$$f: A \rightarrow B \text{ örten ise } f(A) = B$$

2) **Birim Fonksiyon**:

A dan A ya her elemanı kendisine eşleyen fonksiyona birim (özdeşlik) fonksiyon denir



3) **sabit fonksiyon**:



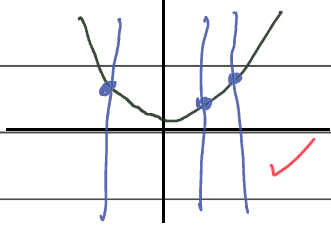
$$f: A \rightarrow B, f(x) = c \quad c \in B$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ ise } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ sabit}$$

4) Bire bir 1-1 fonksiyon: $f: A \rightarrow B$

Eğer tanım kümesindeki farklı elemanların görüntüleri de farklı ise f fonksiyonuna birebir denir

$$x_1, x_2 \in A$$

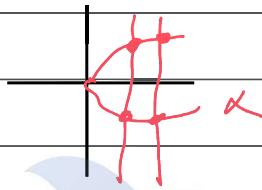
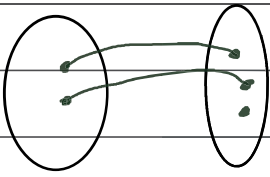


$$f(x_1) = f(x_2) \quad x_1 = x_2$$

$$\text{ör: } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 3$$

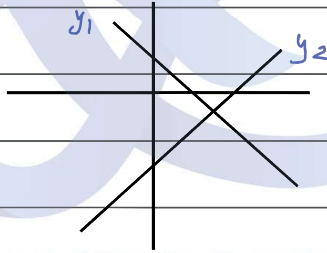
$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \checkmark$$



5) Doğrusal fonksiyon:

$$a \neq 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$$



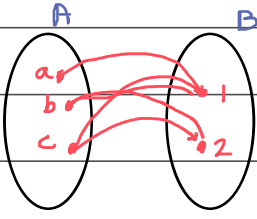
6) parçalı fonksiyon:

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad c \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} g(x) & a \leq x < c \\ h(x) & c \leq x \leq b \end{cases}$$

$x = c$ kritik noktası
ve noktalar

Fonksiyon Sayısı: A dan B ye tanımlı bir fonksiyon sayısı



$$S(A)=m \quad \vee \quad S(B)=n \Rightarrow n^m = \text{fonksiyon sayısı}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

$g(x) \geq 0$ için tanımlıdır

$$f(x) = \sqrt[n+1]{g(x)}$$

$g(x)$ in tanımlı olduğu her yer $\Rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow T.K = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$g(x)$ tanımsız olduğu yerler

$h(x) \neq 0$ " " " $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$h(x) \neq 0$$

$$h(a) = \text{tanımsız}$$

Tek ve çift fonk:

Tek fonk

Çift fonk

$$f: A \rightarrow B \quad \text{her } x \in A$$

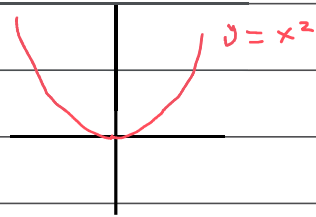
$$f: A \rightarrow B \quad \text{her } x \in A$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Tek fonksiyon grafiği orijine göre simetrik.

Çift fonksiyon grafiği yeksenine göre simetrik



$$\sin(x)$$

$$T.T = \mathbb{R}$$

$$\cos x$$

$$\tan x$$

$$\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\text{sgn } x$$

$$\cot x$$

$$T \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$x^{2n}$$

$$x^{2n+1}$$

$$\frac{T}{T} = \mathbb{R}$$

$$|x|$$

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

Fonksiyonlarda Dört İşlem

$$f: A \rightarrow R, g: B \rightarrow R$$

$$f+g: A \cap B \rightarrow R$$

$$f \cdot g: A \cap B \rightarrow R$$

$$(1) (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(2) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

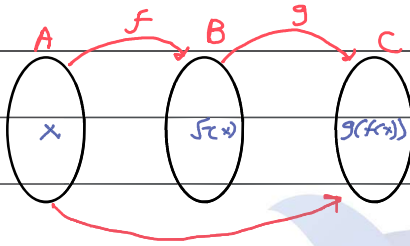
$$f-g: A \cap B \rightarrow R$$

$$\frac{f}{g}: A \cap B \rightarrow R$$

$$(3) (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

iki fonksiyonun bileşkesi



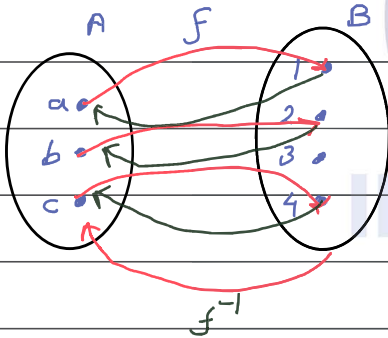
$$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C \Rightarrow g(f(x)): A \rightarrow C$$

$$g[f(x)] = (g \circ f)(x)$$

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

$$g \circ f = g(f(x))$$

Ters Fonksiyon



$f: A \rightarrow B$ ye birebir ve örten fonksiyon olmak üzere

A ye tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun tersi denir

$$f: A \rightarrow B$$

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

Ters fonksiyon özellikler:

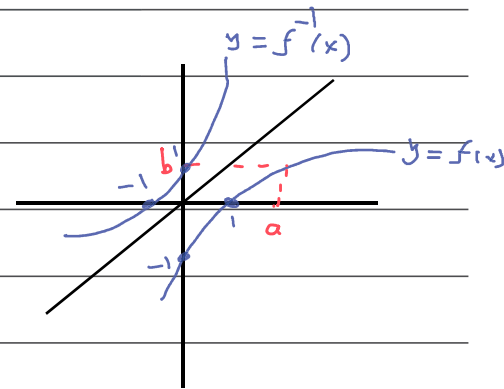
$$1) f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$2) f: R - \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow R - \{\frac{a}{c}\}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$3) f: A \rightarrow B \text{ birebir ve örten } \underline{\text{farb}}$$

$f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonun grafiği $f(x)$ grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetridir



Bileşke ve Ters Fonksiyonlarla ilgili özellikler

$I = I(x)$ birim fonksiyon

1) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

2) $f \circ I = I \circ f = f$

3) $f \circ g = I \Rightarrow f = g^{-1}$ veya $g = f^{-1}$

4) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

5) $f \circ g \neq g \circ f$

6) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Özel Fonksiyon:

* En geniş Tanım Kümesi *

1) polinomlar $\rightarrow \mathbb{R}$
 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $h(a) = 0 \Rightarrow f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$

3) $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow g(x) \geq 0$

$f(x) = \sqrt[n+1]{g(x)} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4) $f(x) = a^{g(x)}$ $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

5) $f(x) = \log_a^{g(x)}$ $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, g(x) > 0$
 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

6) $f(x) = \sin(g(x))$ veya $\cos(g(x))$ $\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ -1 \leq g(x) \leq 1 \end{array} \right\}$

*örnekler:

1) $f(x) = |x^2 - 25|$ parçalı fonksiyon bulunuz

$x^2 - 25$	-5	$25 - x^2$	5	$x^2 - 25$
------------	----	------------	---	------------

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 25 & x > 5 \\ x^2 - 25 & x < -5 \\ 25 - x^2 & -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

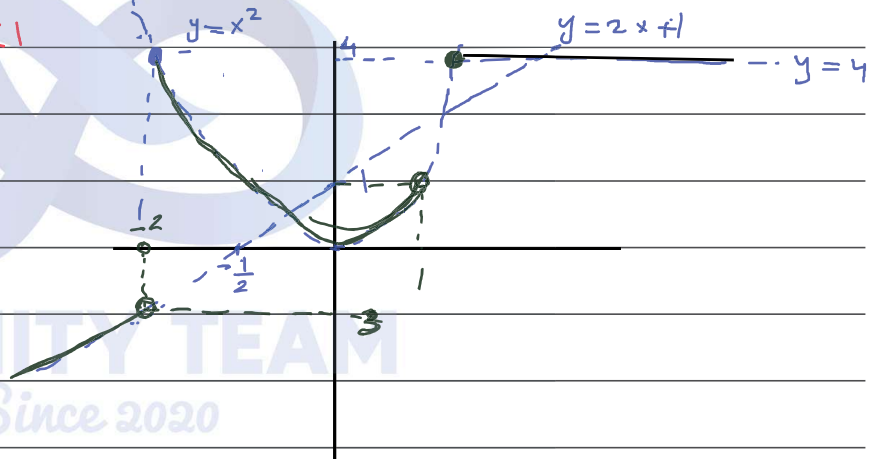
2) $f(x) = |2x - 8| + |10 - x| + x - 5$ parçaları olarak yazınız

	4	10	
$ 2x - 8 $	$8 - 2x$	$2x - 8$	$2x - 8$
$ 10 - x $	$10 - x$	$10 - x$	$x - 10$
$f(x)$	$-2x + 13$	$2x - 3$	$4x - 23$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 13 & x \leq 4 \\ 2x - 3 & 4 < x < 10 \\ 4x - 23 & 10 \leq x \end{cases}$$

3) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x < 1 \\ 4 & x \geq 1 \end{cases}$

fonksiyonun grafiği çizim



① $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 0 \text{ için } x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \text{ için } y = 1 \end{cases}$

② $y = x^2 \Rightarrow \cup$

③ $y = 4$

4) $2x - \lfloor x - 1 \rfloor = 11$ denklemini sağlayan x değerleri $\sum x = ?$

$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x - y = 11 \Rightarrow x = \frac{y+11}{2}$

$\lfloor x - 1 \rfloor = y \Rightarrow y \leq x - 1 < y + 1$

$y + 1 \leq \frac{y+11}{2} < y + 2$

$y + 1 \leq \frac{y+11}{2}$

$2y + 2 \leq y + 11$

$y \leq 9$

$7 < y \leq 9$

$y = 8, y = 9$

$\frac{y+11}{2} < y + 2$

$y + 11 < 2y + 4$

$7 < y$

① $y = \lfloor x \rfloor \quad f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$a \leq x < a+1 \quad \checkmark$

$-3 \leq x < -2 \Rightarrow y = -3$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = -2$

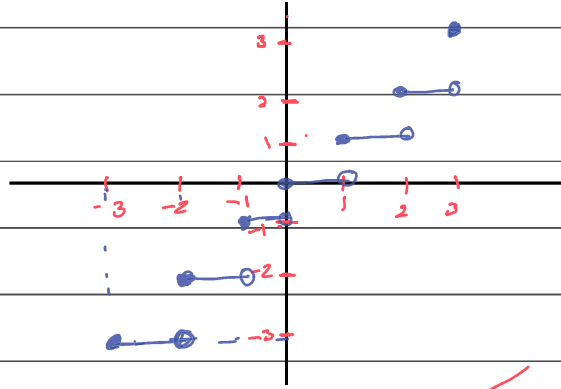
$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = 2$

$x = 3 \Rightarrow y = 3$



② $y = x - \lfloor x \rfloor \quad f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

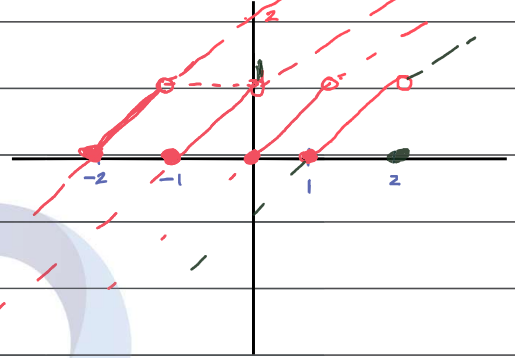
$\lfloor x \rfloor = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1 \quad y = x + 2$

$\lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \quad y = x + 1$

$\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \quad y = x$

$\lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \quad y = x - 1$

$\lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow x = 2 \quad y = 0$



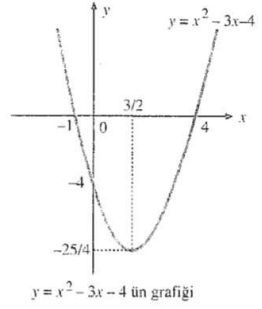
INFINITY TEAM
Since 2020

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve f , A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.



$$y = |x^2 - 3x - 4|$$

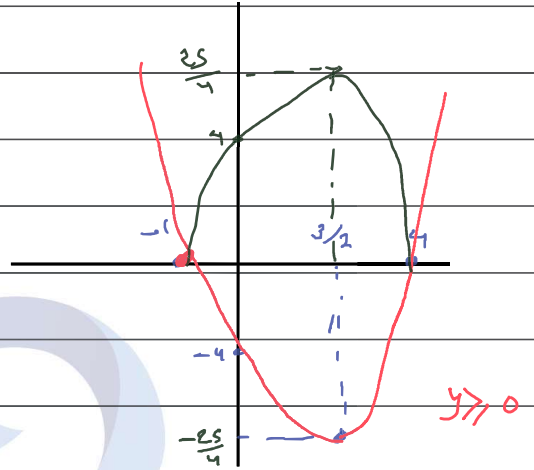
① $1 = a > 0 \Rightarrow \cup$

② $y = 0$ için $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$
 $x_1 = 4, x_2 = -1$

③ $x = 0$ için $y = -4$

④ $T(r, k) \Rightarrow \frac{3}{2} = r \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = k = -\frac{25}{4}$

⑤ $|y|$ her y pozitif olması gerekli
 x eksenine göre simetrisi



2. $y = f(|x|)$

$$y = x^2 - 4x$$

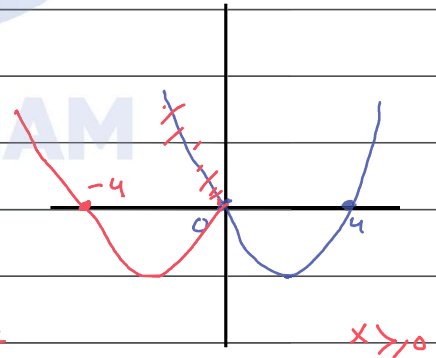
$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$y = 0 \text{ ve } x = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow f(2) = -4$$

$y = f(|x|)$ her x pozitif olması gerek

ve y eksenine göre simetrisi alınır

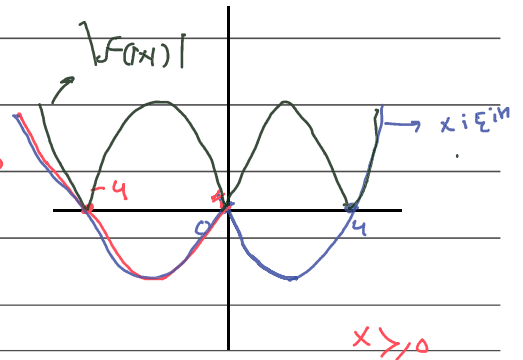


③ $|y| = |f(|x|)|$

her x ve y pozitif olması gerek

önce x için y eksenine göre simetrisi alıp

sonra y x eksenine "

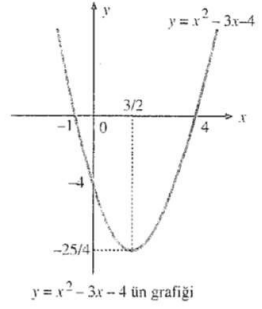


TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve f , A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.



$$y = |x^2 - 3x - 4|$$

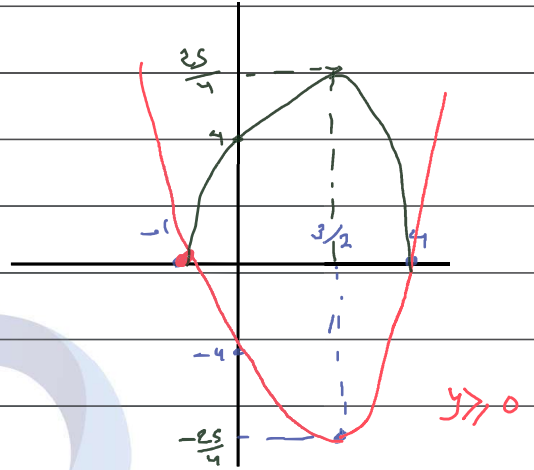
① $1 = a > 0 \Rightarrow \cup$

② $y = 0$ için $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$
 $x_1 = 4, x_2 = -1$

③ $x = 0$ için $y = -4$

④ $T(r, k) \Rightarrow \frac{3}{2} = r \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = k = -\frac{25}{4}$

⑤ $|y|$ her y pozitif olması gerekli
 x eksenine göre simetrisi



2. $y = f(|x|)$

$$y = x^2 - 4x$$

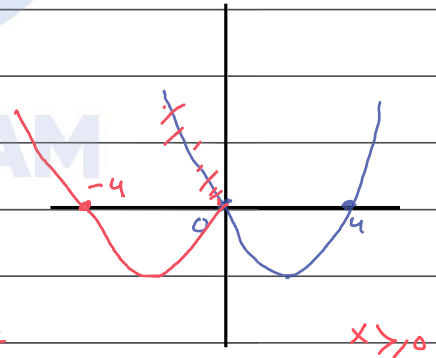
$$x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$y = 0 \text{ ve } x = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow f(2) = -4$$

$y = f(|x|)$ her x pozitif olması gerek

ve y eksenine göre simetrisi alınır

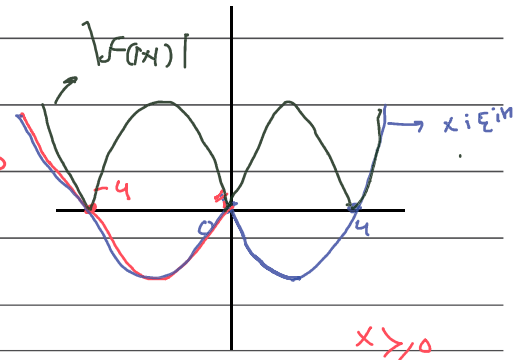


③ $|y| = |f(|x|)|$

her x ve y pozitif olması gerek

önce x için y eksenine göre simetrisi alıp

sonra y x eksenine " " " "



TANIM

$f, A \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f nin işaret fonksiyonu denir, $sgnf$ ile gösterilir.

f reel değerli olduğunda bir x noktasında ya $f(x) > 0$ ya $f(x) < 0$ veya $f(x) = 0$ dır. $f(x) > 0$ ise $\frac{|f(x)|}{f(x)} = 1$, $f(x) < 0$ ise $\frac{|f(x)|}{f(x)} = -1$ olacağından işaret fonksiyonu

$$(sgnf)(x) = sgn f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1, & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

$$f(x) = x^2 - 5x - 6$$

$$x = 0 \text{ için } y = -6$$

$$y = 0 \text{ için } (x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-6)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = -1$$

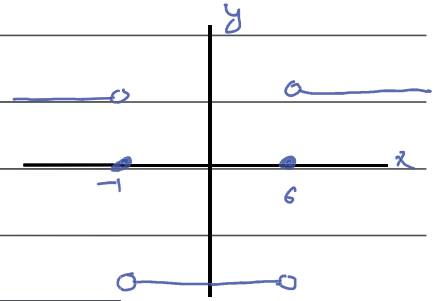
①	-1	①	6	①
+		-		+

$$sgn(x^2 - 5x - 6) = \begin{cases} 1 & x < -1 \text{ veya } x > 6 \\ 0 & x = -1 \text{ veya } x = 6 \\ -1 & -1 < x < 6 \end{cases}$$

$$x < -1 \text{ veya } x > 6$$

$$x = -1 \text{ veya } x = 6$$

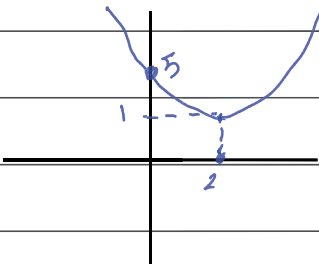
$$-1 < x < 6$$



① $y = -f(x)$ Eğrisinin çizimi

$$y = x^2 - 4x + 5$$

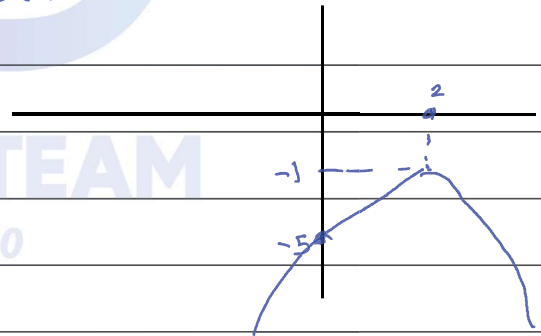
$$y = x^2 - 4x + 5$$



x eksenine göre simetriği

$$y = -f(x)$$

$$y = -x^2 + 4x - 5$$



② $y = f(-x)$ Çizimi

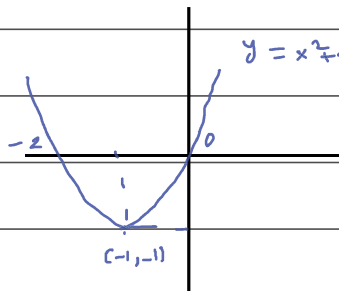
$$y = x^2 + 2x$$

$$y = x^2 + 2x$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = -2$$

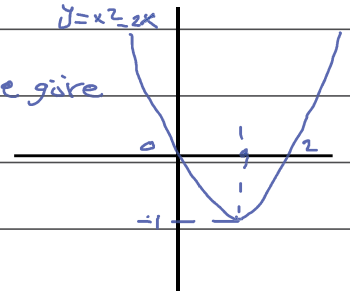
$$r = -1, k = -1$$



$$y = f(-x) = x^2 - 2x$$

$$y = x^2 - 2x$$

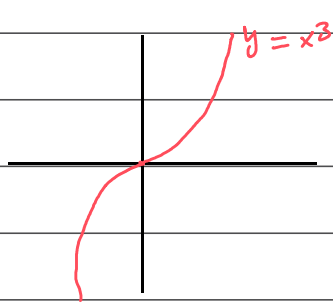
y eksenine göre simetriği



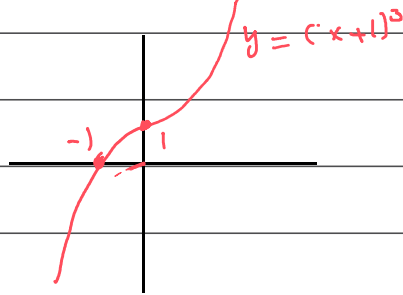
③ $y = f(x-p)$

$y = x^3$ eğrisi 2 birim sağa kaydırılırsa $y = (x-2)^3$

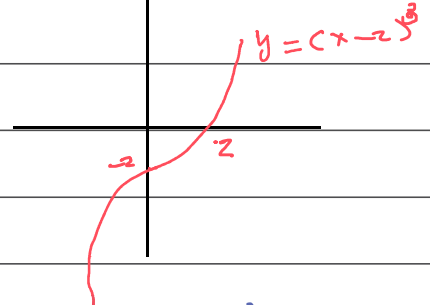
1 birim sola $y = (x+1)^3$



$y = x^3$
 $y=0 \Rightarrow x=0$



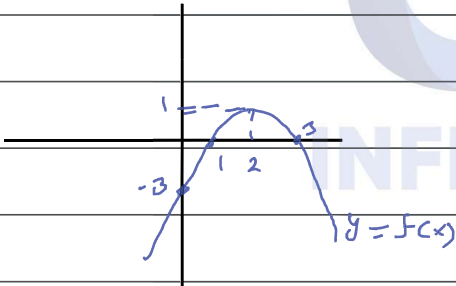
$y = (x+1)^3$
 $x = -1$ için $y=0$
 $x=0 \Rightarrow y=1$



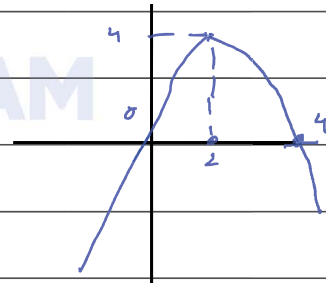
$y = (x-2)^3$
 $x=2$ için $y=0$
 $x=0 \Rightarrow y=-2$

④ $y = f(x) + k$

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$



$y = f(x) + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 4x$



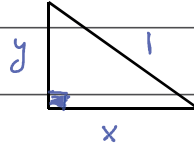
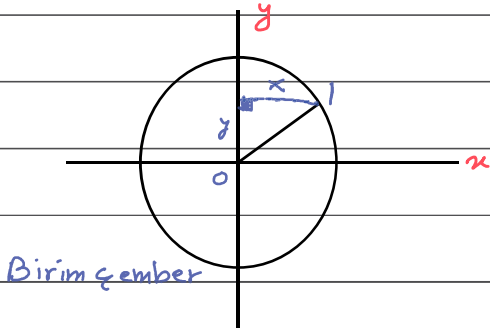
*Not: $y+k \uparrow$ yukarı

$y-k \downarrow$ aşağı

$x+k \leftarrow$ sola

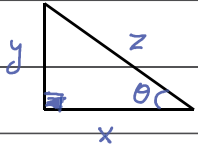
$x-k \rightarrow$ sağa

Trigonometri



$$x^2 + y^2 = 1$$

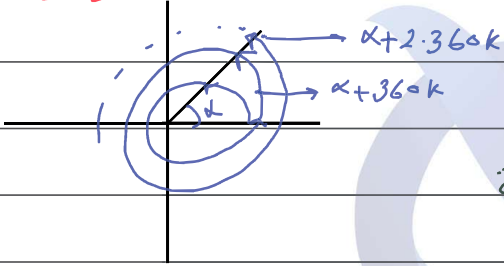
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$



$$\sin \theta = \frac{y}{z}, \quad \cos \theta = \frac{x}{z}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

* Açılış



$$0 \leq \alpha \leq 360, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \alpha + 360k$$

ör

$$\alpha = 2460 = \underbrace{2160}_{360k} + 300 = 300$$

ör

$$\alpha = -1200 + \underbrace{1440}_{360k} = 240$$

ör $\alpha = \frac{29\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 29 \mid 8 \rightarrow 4.2 \\ \hline 3 \end{array} = \frac{5\pi}{4}$$

ör $\alpha = -\frac{33\pi}{5}$

$$\begin{array}{r} 33 \mid 10 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$-\frac{3\pi}{5} + 2\pi = \frac{7\pi}{5}$$

* Tanım kümesi:

$$\sin \alpha : \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow [-1, 1]$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$\cos \alpha : [\pi, 0] \rightarrow [-1, 1]$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\tan \alpha : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$-\infty < \tan \alpha < +\infty$$

$$\cot \alpha : \mathbb{R} \setminus [0 + \pi k] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$-\infty < \cot \alpha < +\infty$$

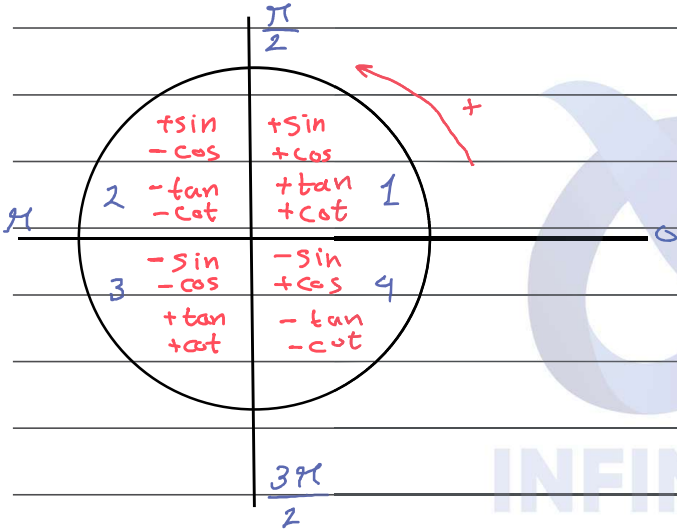
Derece	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radjan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
cot	∞	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{3}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞

$$\tan = \frac{1}{\cot}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{D\pi}{180}$$

$$\text{ör} R = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{3}{135} = \frac{1}{180}$$



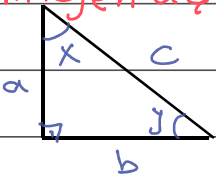
2. bölge için $(\pi - \theta)$, $(\frac{\pi}{2} + \theta)$

1. bölge için $(0 + \theta)$, $(\frac{\pi}{2} - \theta)$

3. bölge için $(\pi + \theta)$, $(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

4. bölge için $(0 - \theta)$, $(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

Tümleyen açısı



$$x + y = 90 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin y = \frac{a}{c} = \cos x$$

$$\cos y = \frac{b}{c} = \sin x$$

Bütünleyen açısı

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

$$x + \theta = 180 \Rightarrow x + \theta = \pi$$

$$x = \pi - \theta$$

$$\tan x = \tan(\pi - \theta)$$

* Bazı özellikleri:

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{veya} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2) \tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$3) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$4) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

* İki yayın toplamı ve farkının trigonometri oranı:

$$1) \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$2) \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$3) \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$4) \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$5) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$7) \cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)}$$

$$6) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

2. grup:

$$1) \sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$3) \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3. grup:

$$1) \sin a + \sin b = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$2) \sin a - \sin b = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$3) \cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$4) \cos a - \cos b = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

4. grup $a > b$

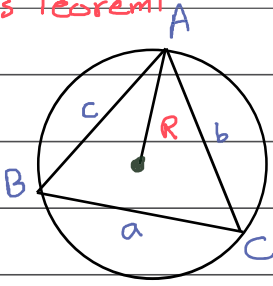
$$1) \cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$2) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$3) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$4) \sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

sinüs Teoremi



Çevrel Çember

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

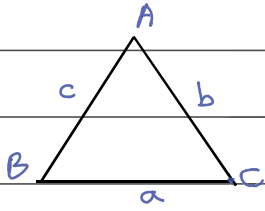
$$\text{Alan } ABC = A(\hat{ABC}) = \frac{1}{2} ab \sin C$$

ÖRNEK : Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 75^\circ$, $m(\hat{B}) = 60^\circ$, $|AB| = c = 8$ br olduğuna göre $|AC|$ kenar uzunluğunu bulunuz.

$$m(\hat{C}) = 45^\circ$$

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6}$$

*Kosinüs Teoremi:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

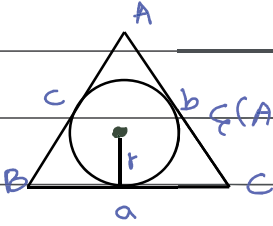
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Max $A = 90^\circ$



$$\hat{A}(\hat{ABC}) = a + b + c = 2u$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = u$$

$$A(\hat{ABC}) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

Periyot

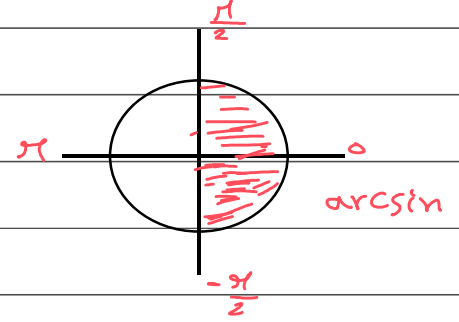
TEOREM 1.1 :

m bir pozitif tamsayı a ve b , $a \neq 0$ olmak üzere reel sayılar olsun.

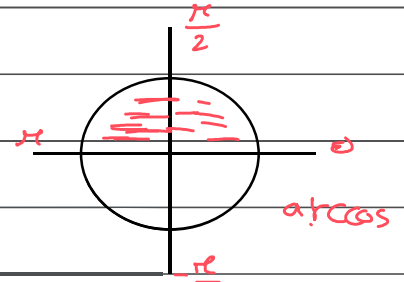
- (1) $\sin x$ ve $\cos x$ in periyodu 2π ,
- (2) $\tan x$ ve $\cot x$ in periyodu π ,
- (3) $\sin(ax+b)$ ve $\cos(ax+b)$ nin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$, $\rightarrow$ Tek
- (4) $\tan(ax+b)$ ve $\cot(ax+b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$, hem çift hem Tek
- (5) $\sin^{2m}(ax+b)$ ve $\cos^{2m}(ax+b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$,
- (6) $\sin^{2m-1}(ax+b)$ ve $\cos^{2m-1}(ax+b)$ nin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$,
- (7) $\tan^m(ax+b)$ ve $\cot^m(ax+b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ dır.

Ters Trigonometriki

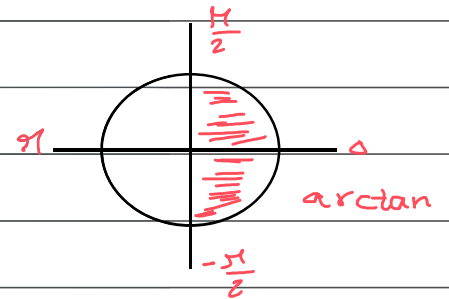
1) $f(x) = \sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$
 $\checkmark f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 $\checkmark f^{-1}(x) = \arcsin(x)$



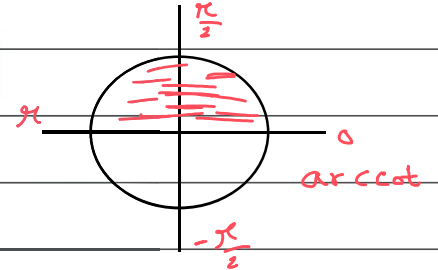
2) $f(x) = \cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$
 $f^{-1}(x) = \arccos x : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$
 $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$



3) $f(x) = \tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $f^{-1}(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 $f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$

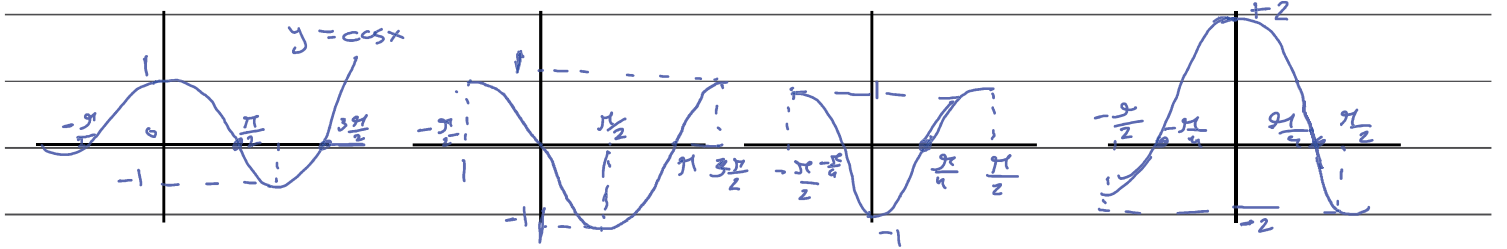


4) $f(x) = \cot x : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$
 $f^{-1}(x) = \cot^{-1}(x)$



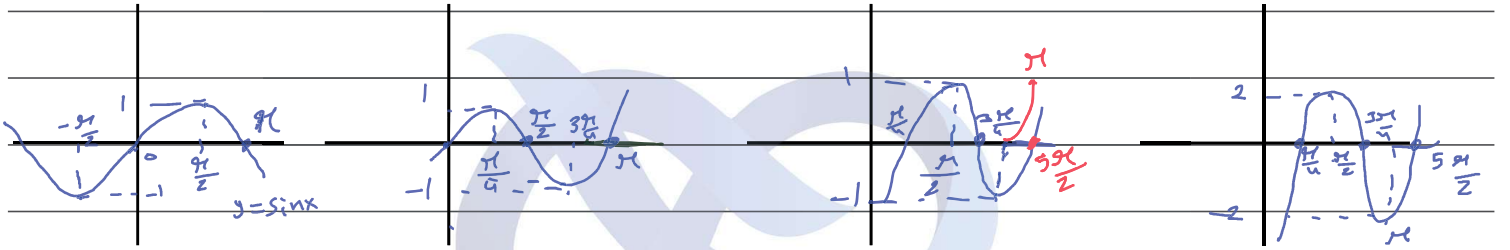
Sınav Soruları Tarzı

1) $f(x) = -2 \cdot \cos(2x + \pi)$ Sınavda 4. graf olması gerekir



1) $y = \cos x$ 2) $y = \cos(x + \pi/2)$ 3) $y = \cos(2x + \pi)$ 4) $y = -2 \cdot \cos(2x + \pi)$

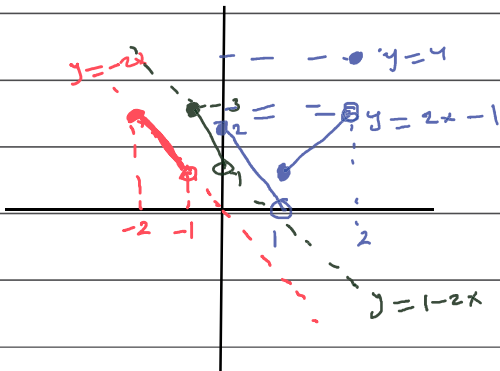
2) $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$



1) $y = \sin x$ 2) $y = \sin(2x)$ 3) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

3) $f(x) = \lfloor x \rfloor + 2|x-1|$ $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -2$	$y = -2 + 2 x-1 = -2 + 2(-x-1) = -2 - 2x - 2 = -4 - 2x$	$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -4 - 2x & -2 \leq x < -1 \\ -1 - 2x & -1 \leq x < 0 \\ 2 - 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$
$-1 \leq x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1$	$y = -1 + 2 x-1 = -1 + 2(1-x) = -1 + 2 - 2x = 1 - 2x$	
$0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$	$y = 0 + 2 x-1 = 2(1-x) = 2 - 2x$	
$1 \leq x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$	$y = 1 + 2 x-1 = 1 + 2(x-1) = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$	
$x = 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2$	$y = 2 + 2 x-1 = 2 + 2(1) = 4$	



Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

$$a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

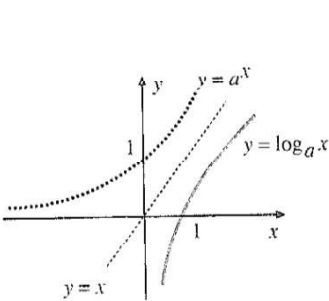
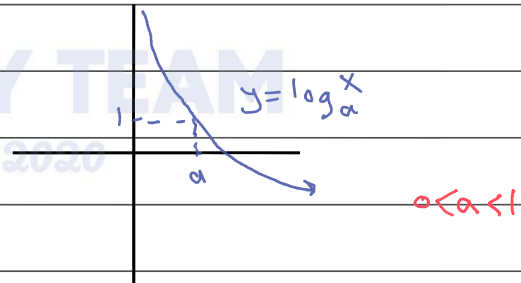
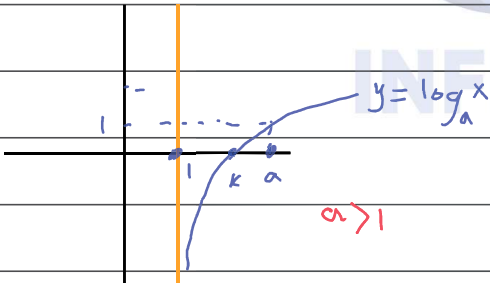
$$f(x) = a^x \rightarrow \begin{matrix} a > 1 \text{ artan} \\ 0 < a < 1 \text{ azalan} \end{matrix} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y \rightarrow \begin{matrix} \text{üs} \\ \text{Taban} \end{matrix} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \quad \text{ve } y > 0$$

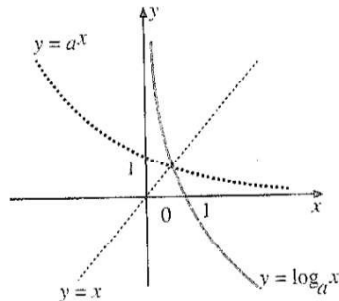
$$\Rightarrow f(x) = \log_a x \Rightarrow f^{-1}(x) = a^x$$

özellikler:

- 1) $\log_a a = 1$
- 2) $\log_a 1 = 0 \quad a \neq 0$
- 3) $\log_a a^n \Rightarrow n \cdot \log_a a = n$
- 4) $\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$
- 5) $\log_e x = \ln x \Leftrightarrow e \approx 2,7$ Euler Numarası
- 6) $\log_a a \Leftrightarrow \log_{1/a} a$
- 7) $\log a^n = n \cdot \log a = n$
- 8) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- 9) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- 10) $\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}$
- 11) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- 12) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$
- 13) $\log_a a = \log_a b \Rightarrow a = b$
- 14) $y = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$
- 15) $\log_a x < \log_a y \Rightarrow \begin{matrix} a > 1 \\ y > x \end{matrix}$
- 16) $\log_a x < \log_a y \Rightarrow \begin{matrix} 0 < a < 1 \\ x > y \end{matrix}$
- 17) $y = \ln x \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x$



$a > 1$ için $y = \log_a x$ in grafiği



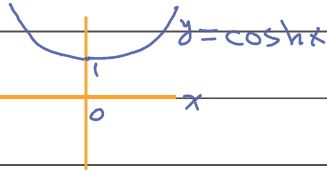
$0 < a < 1$ için $y = \log_a x$ in grafiği

Hiperbolik Fonksiyonlar ve Testler

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{çift}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{tek}}, \quad f(x) = e^x \Rightarrow f(-x) = e^{-x}$$

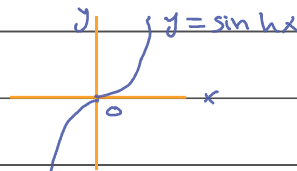
$$\text{çift} \Rightarrow f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

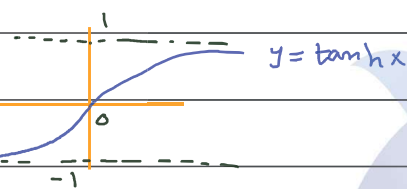


$$\text{Tek} \Rightarrow f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

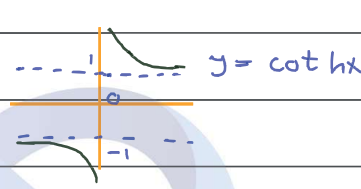
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



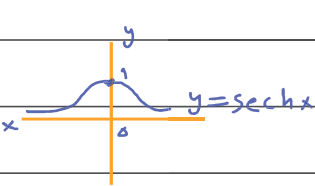
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



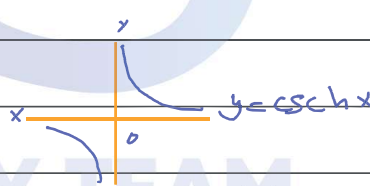
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



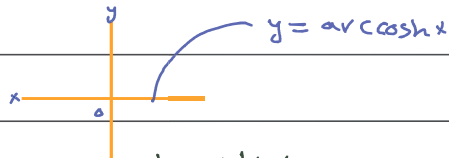
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



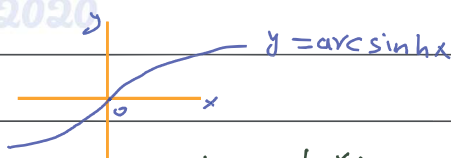
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



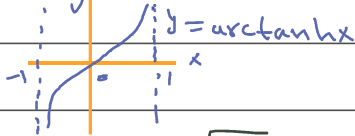
$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1 \text{ için}$$



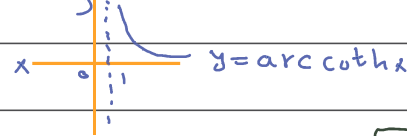
$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{her } x \text{ için}$$



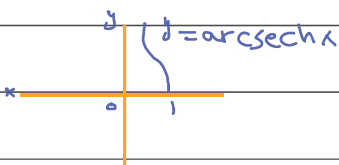
$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x| < 1 \text{ için}$$



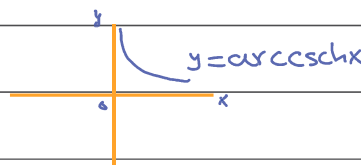
$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$



$$\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) \quad 0 < x \leq 1 \text{ için}$$



$$\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right) \quad x \neq 0 \text{ için}$$





Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği

Fonksiyonlar



* Tamm kümesi hiperbolik için:

$$1) \cosh x: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$$

$$4) \coth x: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$$

$$2) \sinh x: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty) \Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$5) \operatorname{sech} x: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$$

$$3) \tanh x: (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, 1) \Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

$$6) \operatorname{csch} x: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

* Bazı kurallar:

$$1) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$6) \cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

$$2) \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$7) \sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

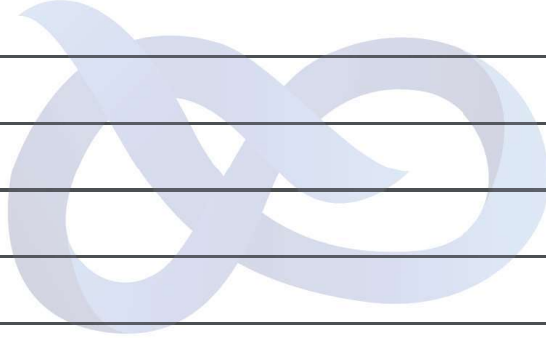
$$3) \sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$8) \operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$$

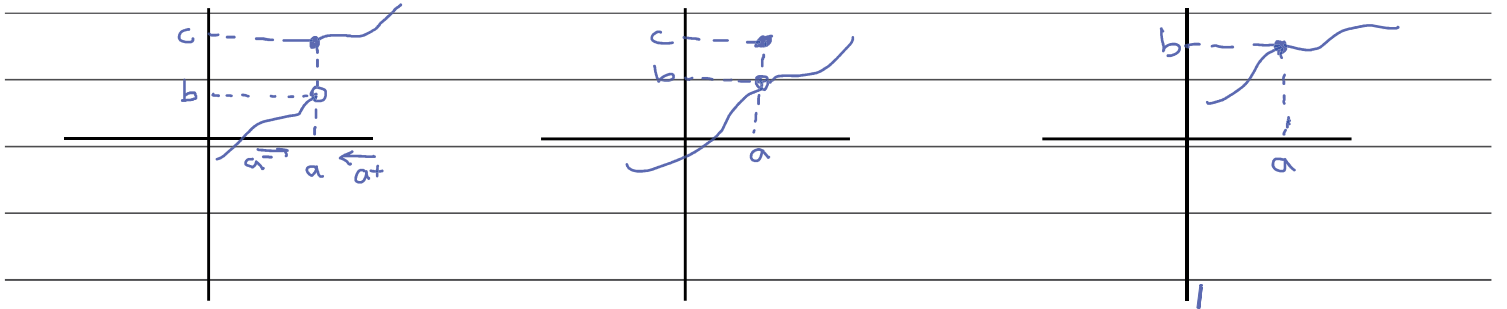
$$4) \sinh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1)$$

$$9) \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

$$5) \cosh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1)$$



INFINITY TEAM
Since 2020



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$
 $c \neq b$ } limit yoktur
 s. süreksizdir
 örnekleri:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$
 limit vardır ama süreksizdir

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
 limit vardır ve süreklidir

1) $\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 - 8x^2 + x - 4 = ?$

$$5 \cdot 8 - 8 \cdot 4 + 2 - 4 = 8 - 2 = 6$$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = ?$

$$\frac{1 + 2 - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{x(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+3)}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

3) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

$x > 0$ sağ $x < 0$ sol

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

ama limit yoktur $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$x^2 - 2x + 3 \quad x \gg 1$$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x \geq 1 \\ -x^2 + 2x - 2 & x < 1 \end{cases}$ $x = 1$ noktasındaki sağ ve sol limit bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2x + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 2x - 2 = -1 + 2 - 2 = -1$$

5) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, $x = 2$ ve $x = \frac{3}{2}$ noktalarındaki limit bulunuz

$\lfloor x \rfloor = 2$ sağ $\lfloor x \rfloor = 1$ sol

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \text{limit yoktur}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} x - 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} x - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2} \checkmark \Rightarrow \text{limit vardır} = \frac{1}{2}$$

limit özellikleri:

1) $-\infty - \infty = -\infty$

2) $+\infty + \infty = +\infty$

3) $+\infty - \infty = \text{Belirsizlik}$

4) $\infty \times \infty = \infty$

5) $\infty \times (-\infty) = -\infty$

6) $-\infty \times (-\infty) = +\infty$

7) $k \in \mathbb{R} \quad k \pm \infty = \pm \infty$

8) $k(-\infty) = -\infty \quad k \in \mathbb{R}^+$

9) $k(-\infty) = +\infty \quad k \in \mathbb{R}^-$ 17) $\frac{0}{0} = \text{Belirsizlik}$

10) $0 \times \infty = \text{Belirsizlik}$ 18) $1^\infty = \text{Belirsizlik}$

11) $\frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \pm \infty \quad k \in \mathbb{R}^+$ 19) $0^0 = \text{Belirsizlik}$

12) $\frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \pm \infty \quad k \in \mathbb{R}^-$ 20) $(\pm \infty)^{2n} = +\infty$

13) $\frac{k}{\pm \infty} = 0^\pm \quad k \in \mathbb{R}$ 21) $(\pm \infty)^{2n+1} = \pm \infty$

14) $\frac{k}{-\infty} = 0^- \quad k \in \mathbb{R}$ 22) $1 < a \rightarrow a^\infty = \infty$
 $a^{-\infty} = 0$

15) $\frac{\infty}{\infty} = \text{Belirsizlik}$

16) $\frac{\infty}{0} = \infty \rightarrow \begin{matrix} \text{sağ} \\ s=1 \end{matrix}$ 23) $0 < a < 1 \rightarrow a^\infty = 0$
 $a^{-\infty} = \infty$

* limit çeşitleri:

1) polinom fonksiyon limiti:

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$

1) $x \rightarrow k$ direk yerine koyuyoruz

2) $x \rightarrow \pm \infty$ en büyük üssün

ör: $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$

2) Rasyonel fonksiyon limiti:

$a \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad h(a) = 0$ ise a noktası kritik noktadır

* fonksiyon kritik nokta haricinde sürekli

* kritik noktada limit istenirse fonksiyonun sağ ve sol limit incelenir.



$x \rightarrow \infty$

1) $x \rightarrow \pm \infty$

Belirsizlik $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{ax^n + \dots}{bx^m + \dots} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} = k \rightarrow \text{sonuç}$

1) $n > m \quad k = \pm \infty$

2) $n = m \quad k = \frac{a}{b}$

3) $n < m \quad k = 0$

Not: $\sin < \ln x < x^n < a^x < x! < x^x$
 $\cos$

örnekler:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{3x^3 + 2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 2^x}{4^x + 3^x} = ?$$

$$\frac{3^x}{4^x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x = (0.75)^x$$

daha büyük $\leftarrow 4^x$

$$= 0 \quad 0 < a < 1$$

2) $x \rightarrow k$

$$1) \frac{0}{0} = \text{Belirsizlik} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = 1-2 = -1$$

$$2) \frac{k}{0} = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$3) \frac{0}{k} = 0$$

$$4) \frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)} = 1$$

l'Hopital

$$\frac{0}{0} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{2x - 5}{1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 = 6 - 5 = 1$$

3) köklü fonksiyon limiti:

$$1) f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Not: Sınav Test oluyorsa kullanabilirsiniz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right] \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right]$$

*örnekle:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 9} - x = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2\left(x + \frac{3}{4}\right) = 2x + \frac{3}{4} - x$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{4} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \infty}} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{3}{4} = \infty$$

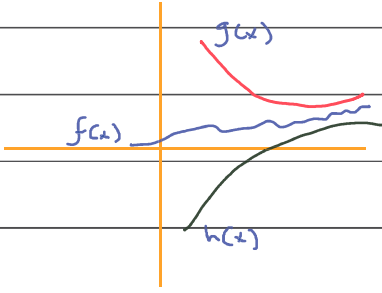
*klasik yöntem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}\right)} - x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x) \sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}} - 1 \right) \Rightarrow = \infty (\sqrt{4+0+0} - 1)$$

$$= \infty$$

4) Sandviç Teoremi:



$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

örnekler:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Sandviç Teorem} \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

5) Bazı Trigonometrik limitleri:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \frac{x}{\sin x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 = \frac{x}{\tan x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = 1$$

5) $0 \cdot \infty$ Belirsizliği:

$$x \rightarrow \infty \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{x} = t \quad 0, \infty \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ veya } \frac{0}{0}$$

$$\text{ör} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x} = \infty \cdot 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} = t \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \Rightarrow x = \frac{3}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{t} \cdot \sin t \Rightarrow 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3 \cdot 1 = 3$$

6) 1^∞ Belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \cdot v(x) = k$$

$$\text{ise } \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + u(x)]^{v(x)} = e^k$$

örnekler:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-x} + \frac{3}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^\infty + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \infty + 0 = \infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot x = 1 \Rightarrow = e^1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \quad x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^t$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = t = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{t} \cdot t = 3 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^t = e^3$$

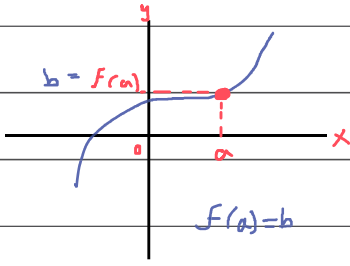
$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4} \right]^{2x+3} = ?$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 3 - 4}{x^2 + 4} \right]^{2x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2x-1}{x^2+4} \right]^{2x+3}$$

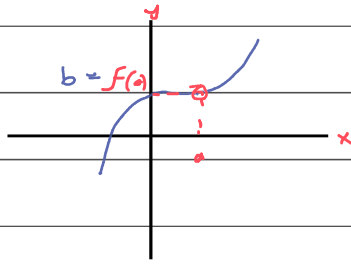
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2+4} \cdot (2x+3) = \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2x-1}{x^2+4} \right]^{2x+3} = e^4$$



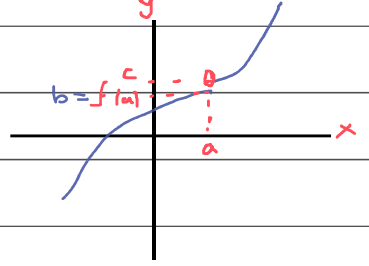
$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

limit vardır ve süreklidir



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \neq f(a)$$

limit vardır ama süreksizdir



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b, c \neq b \Rightarrow \text{lim yoktur}$$

Süreksizlik! → Tanımsızlıklarda örnek $\frac{x-1}{x+1}$ $x \neq -1 \rightarrow$ kritik nokta ve süreksizlik

parçalı fonksiyon: parçalama noktası (kritik noktası)

$$\text{ör. } f(x) = \begin{cases} 3x+5 & x > 1 \\ 2x & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{süreksiz}$$

süreklilik olma şartı: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

süreksizlik

Tanımsız → parçalı fonksiyonlar (kritik noktası)

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

$$x=2 \text{ tanımsız} \rightarrow f(2) = \text{yoktur}$$

$$x=2 \text{ süreksiz}$$

kesin süreksiz noktalar

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 5 \\ x+1 & x \leq 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 9, \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 6$$

$$f(5) = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

süreksizdir

örnek $f(x) = 3x+1 \rightarrow$ her yerde süreklidir

Tanımsız yapan

hiçbir x yoktur

parçalı fonksiyon değildir

*Örnekler:

1) $f(x) = x^3 - 5x + 5$ fonksiyon sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

parçalı fon değil ve Tanımsız yoktur $\Rightarrow R = (-\infty, +\infty)$

2) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

Tanımsız noktası $x = -5$ sürekli $\Rightarrow R \setminus \{-5\}$

3) $f(x) = \sqrt[7]{x+5} + \sqrt[6]{x}$

$\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow [0, +\infty)$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ x^2 + 3 & x \leq 1 \end{cases}$

sürekli olduğu noktalar bulunuz

parçalı fonksiyon ama tanımsız noktası yoktur

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4, f(1) = 4$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow x = 1$ sürekli

5) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x > 2 \\ x^2+1 & x \leq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5, f(2) = 5$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 5 \Rightarrow x = 2$ sürekli

6) $f(x) = \begin{cases} 5 & x = -1 \\ x+1 & x \neq -1 \end{cases}$

$x = -1$ noktası sürekli midir?

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, f(-1) = 5 \Rightarrow x = -1$ sürekli

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x < 3 \\ \frac{2x+1}{x^2-16} & x \geq 3 \end{cases}$

$x = -4$ noktası sürekli $x \geq 3$

Tanımsız noktalar

parçalı

$x = 2, x = 4$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3, f(3) = -1$

$\Rightarrow x = 3$ sürekli

$\{2, 3, 4\} \Rightarrow$ sürekli

8) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 3 & x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ bx - 1 & x > 2 \end{cases}$

fonksiyon her noktada sürekli ise a, b kaçtır?

$x^2 + ax + 3 = 5 = bx - 1$

$x = 2 \Rightarrow 4 + 2a + 3 = 5 = 2b - 1$

$\Rightarrow 4 + 2a + 3 = 5, 2b - 1 = 5$

$a = -2$

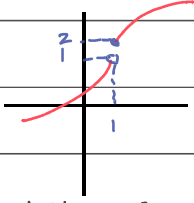
$2b = 6$

$b = 3$

$a \cdot b = (-2)(3) = -6$

Süreksizlik çeşitleri

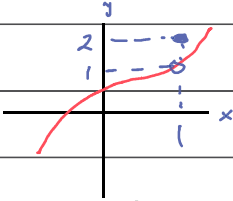
1) Sıçırma (Atlamalı) süreksizlik



$x=1$ sıçırma süreksizlik

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} 2 \neq 1$$

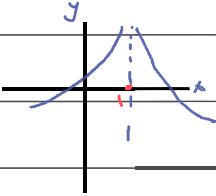
2) kaldırılabilir süreksizlik



$x=1$ kaldırılabilir süreksizlik

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &\neq f(1) \end{aligned}$$

3) Sonsuzluk süreksizlik



$x=1$ sonsuzluk süreksizlik

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= +\infty \text{ veya } -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= +\infty \text{ veya } -\infty \\ f(1) &= \text{yoktur} \end{aligned}$$

örnekler:

1) $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$

süreksizlik $x=-1$ ve sonsuzluk süreksizliği

2) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2+3=5 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$f(2) = 6$$

kaldırılabilir süreksizliği

3) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 4 \\ 2x-1 & x \leq 4 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 17$$

$$f(4) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 7$$

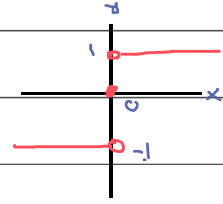
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

sıçırma süreksizliği

özel fonksiyonlar süreksizliği

1) işaret fonksiyon

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



işaret fonksiyonu 0 yapan değerle süreksizliği

örnek : $f(x) = \text{sgn}(x-3)$ süreksiz olduğu nokta $x=3$

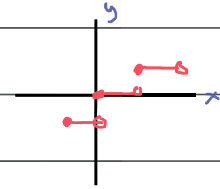
$\Rightarrow$ en geniş aralık $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

örnek : $f(x) = \text{sgn}(x^2-4)$ süreksiz $x=2, x=-2$

$\Rightarrow$ en geniş aralık $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

2) Tam değer fonksiyon

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ içeren tam sayı yapan
x değerleri süreksiz
diğer x ler sürekli



örnek : $f(x) = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor$ süreksiz olduğu noktalar $\{3k\} \rightarrow \{-3, 0, 3, 6, \dots\}$

sürekli olduğu en geniş aralık

$\mathbb{R} \setminus \{3k \text{ tüm sayılar } 3 \text{ ün katı}\}$

3) Mutlak değer

$$f(x) = |x+a|$$

$x = -a$ kritik noktası

$\hookrightarrow$ süreksiz

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = x+a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -(x+a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \neq \lim_{x \rightarrow a^-}$$

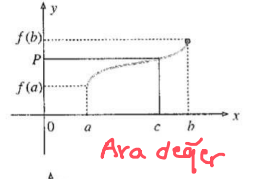
Kapalı Bir Aralıkta Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

Ara değer teoremi:

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

P , $f(a)$, $f(b)$ arasında herhangi bir sayı ise $[a, b]$ aralığında

$f(c) = P$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

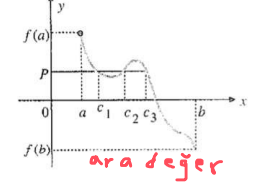


Bolzano Teoremi:

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

$f(a)$ ile $f(b)$ zıt işaretli ise a ile b arasında

$f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

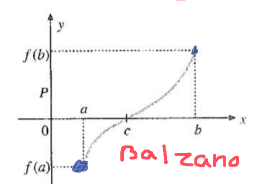


ÖRNEK $x^3 + x^2 - 1$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz

$f(x) = x^3 + x^2 - 1$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde sürekli dir.

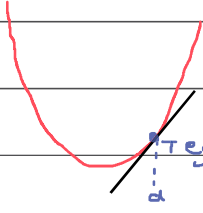
$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ 0 ile 1 $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir

c noktası vardır, şu halde x yerine $c \Rightarrow c^3 + c^2 - 1 = 0$ bu c nin bir kök olduğunu gösterir

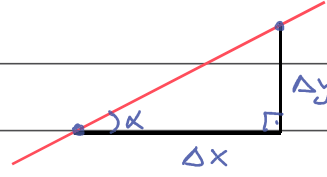


INFINITY TEAM
Since 2020

$$\text{Türev} = \text{eğim} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



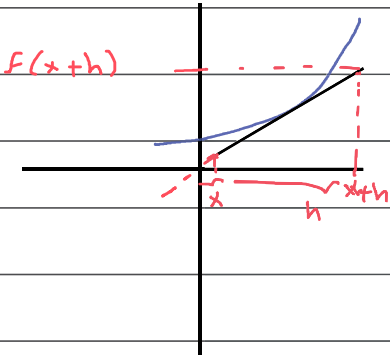
$$f(x) = f'(a)$$



$$f'(x) = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Türev sembolleri:

$$f(x) \rightarrow f'(x) \text{ veya } \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, y'(x), y', Df(x)$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Örnek: $f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = ? \Rightarrow f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 3x + 3h - x^2 - 3x}{h}$$

$$x^2 + h^2 + 2xh + 3x + 3h$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x + 3 \Rightarrow 2x + 3 = f'(x)$$

* l'hopital : $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

örnekler:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x - 6}{x + 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{l'hopital} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 5}{1} = -4 + 5 = 1$

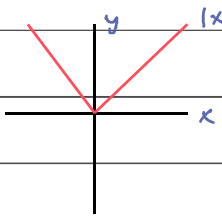
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{l'hopital} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{x}{x} = 1$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{l'hopital} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$
 formül = 1

Türev alma kuralları:

Türev alma şartı, (kritik noktası) noktasındaki türevin var olması için gerek ve yeter şart, sağ ve sol türevlerin var ve birbirlerine eşit olmasıdır



örnek $f(x) = |x| \Rightarrow x = 0$ noktasındaki türev hesaplama

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

$\Rightarrow$ sağ türev 1 ve sol türev -1 $\Rightarrow$ türev yoktur

özel fonksiyonlar kritik noktası varsa onlar türevlerini sıfırdır

Türev kuralları:

1) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

3) $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

4) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

5) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

6) $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$

7) $f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

8) $f(x) = \sqrt[m]{(g(x))^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m} \sqrt[m]{(g(x))^{n-m}}$

9) $(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = f'(x) \cdot g'(f(x))$

10) $(h \circ g \circ f)'(x) = [h(g(f(x)))]' = h'[g(f(x))] \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$

11) zincir kuralı $= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$, $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$

örnek: $y = u + \sqrt{2u}$

$u = t^3 + 1$

$t = \sqrt{1+x}$

$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = ?$

$x=0 \Rightarrow t=1$

$t=1 \Rightarrow u=2$

$u=2 \Rightarrow y=4$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{2}{2\sqrt{2u}}\right) \cdot (3t^2) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow = \left(1 + \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (3 \cdot 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$\frac{9}{4}$

12) Ters Fonksiyon Türevi

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x_0) = y_0$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

örnek: $f(x) = x^5 + x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow (f^{-1})'(2) = ?$

1. adım $x^5 + x = 2 \Rightarrow x_0 = 1$
 $y_0 = 2$

2. adım $f'(x) = 5x^4 + 1$

3. adım $f'(x_0) = f'(1) = 5 + 1 = 6$

4. adım $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$

13) parametrik fonksiyon Türevi

$$y = f(t), x = h(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

örnek: $y = t^3 - 1, x = \sqrt{t}, \frac{dy}{dx} \Big|_{t=4} = ?$

$$\left. \begin{array}{l} y' = 3t^2 \quad t=4 \\ x' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y' = 3 \cdot 16 = 48 \\ x' = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \frac{y'}{x'} = \frac{48}{\frac{1}{4}} = 192$$

14) kapalı fonksiyon Türevi

$$* F(x, y) = 0 \quad (y = f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

$\xrightarrow{x \text{ in türevi} \rightarrow y \text{ sabit}}$
 $\xrightarrow{y \text{ in türevi} \rightarrow x \text{ sabit}}$

örnek: $x^2 + y^2 - 3xy + 2x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

1. yol formül $\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{(2x - 3y + 2)}{(2y - 3x - 4)} = \frac{3y - 2x - 2}{2y - 3x - 4}$

2. yol. Klasik Soruları için y' bulmamız gerekiyor

$$\Rightarrow 2x + 2y \cdot y' - 3(y + x \cdot y') + 2 - 4y' = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2yy' - 3xy' - 4y' - 3y + 2 = 0$$

$$y'(2y - 3x - 4) = (3y - 2x - 2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3y - 2x - 2}{2y - 3x - 4}$$

15) Trigonometri ve ters Trigonometri Türevi

$$1) f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \quad f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \cos x$$

$$2) f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \quad f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \cdot \sin x$$

$$3) f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(x) [1 + \tan^2(g(x))] = g'(x) \cdot \sec^2(g(x)) = \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$$

$$4) f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

$$u = g(x)$$

$$5) f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \cdot \tan x \quad (\sec u)' = u' \cdot \sec u \cdot \tan u$$

$$6) f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cdot \cot x \quad (\csc u)' = -u' \cdot \csc u \cdot \cot u$$

$$7) f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$8) f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$9) f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$10) f(x) = \operatorname{arccot} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$11) f(x) = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1) \quad (\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2-1}}$$

$$12) f(x) = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$$

Türev

1b) Logaritma ve üstel fonksiyon Türevi

$$1) f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \equiv \frac{1}{x} \cdot \log_e a \Rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

$$2) f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

örnek: $f(x) = \ln(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$f(x) = \ln(\tan x)$

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$$

$$3) f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = a^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln a$$

$$1) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^x$$

örnek: $f(x) = 2^{\cos x}$

$$f'(x) = -\sin x \cdot 2^{\cos x} \cdot \ln 2$$

$$4) f(x) = [g(x)]^{h(x)} \Rightarrow \text{her iki tarafı } \ln \text{ alınıp}$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) = g(x) \cdot \ln(h(x))$$

her iki tarafı türev alınıp

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) \cdot \ln(h(x)) + \frac{h'(x)}{h(x)} \cdot g(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[g'(x) \cdot \ln(h(x)) + \frac{h'(x)}{h(x)} \cdot g(x) \right]$$

örnek: $f(x) = x^{\sin x}$ için $f'(\frac{\pi}{2}) = ?$

$$y = x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \sin x \cdot \ln(x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$y' = x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln(x) + \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^{\sin(\frac{\pi}{2})} \left[\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} \cdot \ln(\frac{\pi}{2}) + \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right] \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1$$

17) Hiperbolik fonksiyonların Türevi:

Hatırlama: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & x \geq 1 \\ \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & \text{her } x \text{ için} \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), & |x| < 1 \text{ için} \\ \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), & x > 1 \text{ için} \\ \operatorname{argsech} x &= \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \text{ için} \\ \operatorname{arcsch} x &= \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}\right), & x > 0 \text{ için} \end{aligned}$$

1) $f(x) = [\cosh(g(x))] \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \sinh(g(x))$

2) $f(x) = [\sinh(g(x))] \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \cosh(g(x))$

3) $f(x) = \tanh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$ $(\tanh u)' = u' \cdot \operatorname{sech}^2 u$

4) $f(x) = \coth x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch}^2 x$ $(\coth u)' = -u' \cdot \operatorname{csch}^2 u$

5) $f(x) = \operatorname{sech} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$

6) $f(x) = \operatorname{csch} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$

7) $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $x > 1$

8) $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

9) $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{x^2 - 1}$ $|x| < 1$

10) $(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{-1}{x^2 - 1}$ $x > 1$

11) $(\operatorname{argsech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ $0 < x < 1$

12) $(\operatorname{arcsch} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ $x > 0$

Örnek: $f(x) = (1-x) \cdot \operatorname{artanh} x \Rightarrow f'(0) = ?$

$$f'(x) = -1 \cdot \operatorname{artanh} x + \frac{1-x}{x^2-1}$$

$$f'(0) = 0 + \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

18) Yüksek mertebeden türevi

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x)$$

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right]$$

örnek ve formül: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = ?$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{+2 \cdot 1}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-2 \cdot 1}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-4 \cdot 2 \cdot 1}{x^5}$$

Her zaman paydanın üssü birden fazladır
ama payda faktöriyel olacak

$$\star f^{(n)} = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$\star f(x) = e^{nx} \Rightarrow f^{(n)}(x) = n^n \cdot e^{nx}$$

$$\star f(x) = x^n \Rightarrow f^{(n)}(x) = n!$$

örnekler: $f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(50)}(x) = ?$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

 $\cos x$
 $\Rightarrow (\text{mod } 4)$

$$\frac{50}{4} = \frac{48}{4} + \frac{2}{4} \Rightarrow f^{(50)}(x) = f^{(2)}(x) = -\cos x$$

 $\star f(x) = 5x^9 \Rightarrow f^{(9)}(x) = ?$

$$f'(x) = 5 \cdot (9 \cdot x^8)$$

$$f^{(9)}(x) = 5 \cdot (9!)$$



Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği

Türev



en önemli formül:

$$y' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \text{ parametrik}$$

örnek:

$$x = 4 \cos t$$

$$y = 3 \sin t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x' = -4 \sin t & , x'' = -4 \cos t \\ y' = 3 \cos t & , y'' = -3 \sin t \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{-4 \cdot (-3) - (3 \cdot (-4))}{(-4 \sin t)^3} = \frac{12 + 12}{-64 \sin^3 t} = \frac{24}{-64 \sin^3 t}$$

$$\frac{-4 \sin t \cdot (-3 \sin t) - (3 \cos t \cdot (-4 \cos t))}{(-4 \sin t)^3} = \frac{12 \sin^2 t + 12 \cos^2 t}{-64 \sin^3 t} = \frac{12}{-64 \sin^3 t}$$

$$12 [\sin^2 t + \cos^2 t] = 12$$

$$(x')^3 = (-4 \sin t)^3 = -64 \sin^3 t$$

$$\frac{3}{16} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{32 \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{64}$$

örnek: $x = 3t^2$

$$y = 5t^3$$

$$\left\{ \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} \right.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

$$x' = 6t, x'' = 6$$

$$y' = 15t^2, y'' = 30t$$

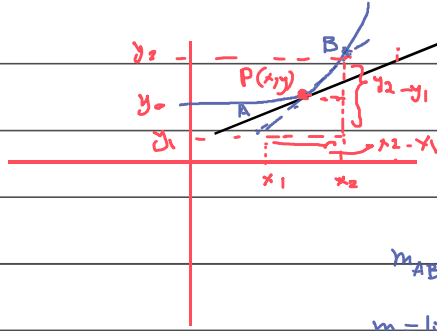
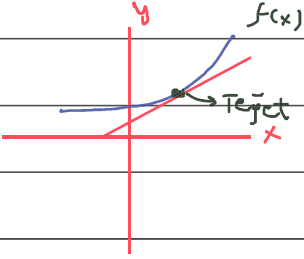
$$6t(30t) - (15t^2)6$$

$$180t^2 - 90t^2 = 90t^2$$

$$(\dot{x})^3 = (6t)^3 = 216t^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{90t^2}{216t^3} = \frac{90}{216t} = \frac{5}{12t}$$

*Türev Geometrik Anlamı:



$$y_2 = f(x_2)$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$x_1 = a, x_2 = x$$

$$m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

L'Hospital

$$m = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$$

$$m' = f'(a) \rightarrow \text{eğim}, m = \tan \alpha$$

$$1) y - y_0 = m_T (x - x_0) \rightarrow \text{Teğet denklem}$$

$$* m_T \cdot m_N = -1$$

$$2) y - y_0 = m_N (x - x_0) \rightarrow \text{Normalin denklem}$$

$$\Rightarrow m_N = -\frac{1}{m_T}$$

örnekler:

1) $f(x) = x^3 - 3x$ eğrisine $x = 2$ absisi noktasından çizilen teğet denklemini bulunuz.

$$1. \text{adım } f'(x) = 3x^2 - 3$$

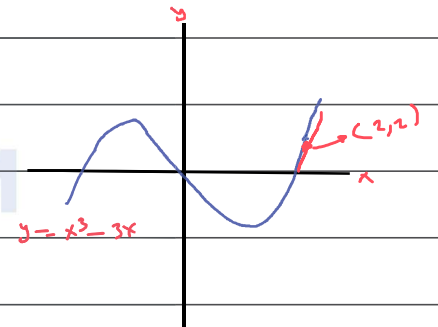
$$2. \text{adım } f'(2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9 = m_T$$

$$3. \text{adım } y_0 = ? \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 8 - 6 = 2 \quad (x_0, y_0) = (2, 2)$$

$$4. \text{adım } y - y_0 = m_T (x - x_0)$$

$$y - 2 = 9(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 9x - 18$$

$$y = 9x - 16$$



2) $y = 3x - x^2$ eğrisinin $y = x$ doğrusuna paralel olan teğetin denklemini yazınız.

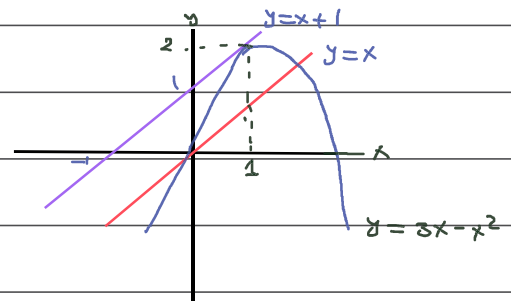
$$m = f'(x) \Rightarrow m = 1$$

$$y' = 3 - 2x \Rightarrow 3 - 2x = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 - 1 = 2, A(1, 2)$$

$$y - y_0 = m_T (x - x_0)$$

$$y - 2 = (x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$



3) $y = x^2 + 1$ eğrinin apsisi 1 olan noktasından çizilen normalin denklemini yazın

1. adım $y' = 2x$

2. adım $f'(1) = 2 = m_T$

3. adım $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

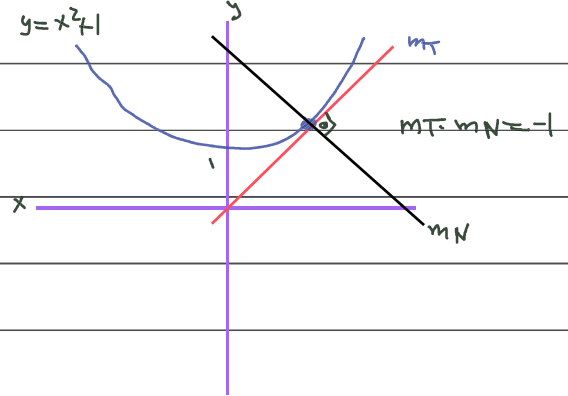
4. adım $m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = \frac{-1}{m_T} = \frac{-1}{2}$

5. adım $y - y_0 = m_N(x - x_0)$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$



İki eğri arasındaki açı:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \text{AÇI}$$

Örnek: $y = 2x^2 + 3$ ve $y = \frac{3}{10}x^2 + \frac{47}{10}$ eğriler kaç derecelik açı altında kesilir?

1. adım $2x^2 + 3 = \frac{3}{10}x^2 + \frac{47}{10}$

$$\Rightarrow 20x^2 + 30 = 3x^2 + 47$$

$$17x^2 = 17 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 5$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 5$$

2. adım $A(1, 5)$ ve $B(-1, 5)$

3. adım $A(1, 5) \Rightarrow y' = 4x$ ve $y' = \frac{6x}{10} = \frac{3x}{5}$

4. adım $m_1 = f'(1) = 4$

$$m_2 = f'(-1) = \frac{3}{5}$$

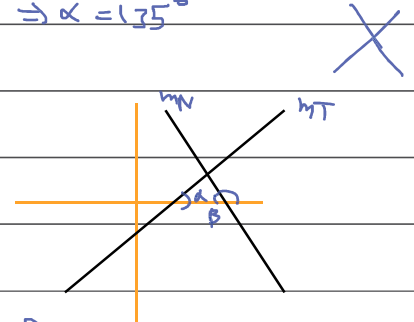
5. adım $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{4 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{4 \cdot 3}{5}} = \frac{\frac{17}{5}}{\frac{17}{5}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

6. adım $B(-1, 5) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-4 + \frac{3}{5}}{1 + \frac{3 \cdot (-4)}{5}} = \frac{-\frac{17}{5}}{\frac{17}{5}} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$

$$m_1 = -4$$

$$m_2 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



önemi:
değil

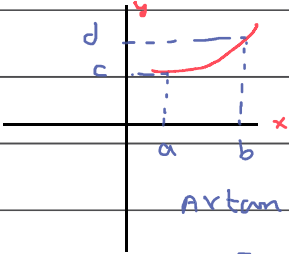
$$\tan \alpha = 180 - \beta$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = (\tan 180 - \beta)$$

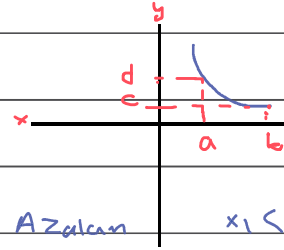
$$\tan \alpha = -\tan \beta$$

A Maksimum - Minimum

$f(x)$ in Artan ve Azalan aralıklar
maksimum ve minimum



$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$



$x_1 < x_2$ iken $f(x_2) < f(x_1)$

f fonksiyonun $[a, b]$ de sürekli ve (a, b) nin her bir noktasında türevli olsun

Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise $f|_{[a, b]}$ artandır

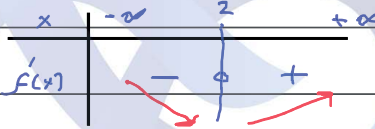
$f'(x) < 0$ ise $f|_{[a, b]}$ azalandır

örnek: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2$$



Azalan aralıkları: $(-\infty, 2]$

Artan aralıkları: $[2, +\infty)$

örnek: $f(x) = x^3 + 3x$ " " " " " " "

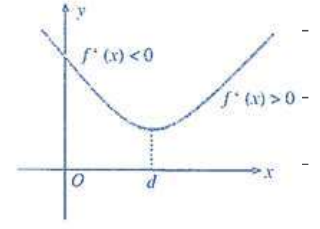
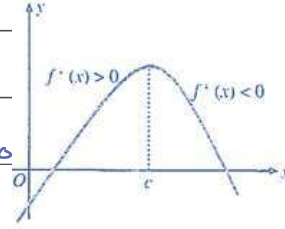
$$f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$$

Fonksiyonun $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ aralığında artandır

* yerel ekstremum noktaları:

yerel maksimum : $f(x) \leq f(c)$

yerel minimum : $f(c) \leq f(x)$



Eğer c noktasının solunda $f'(x) > 0$, sağında $f'(x) < 0$ ise c de bir yerel maksimum vardır

Eğer d noktasının solunda $f'(x) < 0$, sağında $f'(x) > 0$ ise d noktasında bir yerel minimum

örnek: $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow 3(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

$$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

$$f(x_1) = f(-1) = 2$$

↑
max

$$f(x_2) = f(1) = -2$$

↓
min

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$		2	-2	

Arılan max Azalıyor min Artıyor

$(-\infty, -1] \rightarrow$ Artan

$[-1, 1] \rightarrow$ Azalan

$[1, +\infty) \rightarrow$ Artan

yerel ekstremum
yerel max noktası = 2
yerel min noktası = -2

Fermat teoremi:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel min veya yerel max varsa ve f fonksiyonun c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$

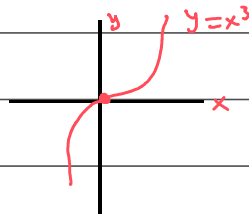
örnek: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\forall x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \forall x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \\ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \end{array} \right\} c=0 \text{ noktası} \Rightarrow f(x) = x^3 \text{ ne bir yerel min ne de bir yerel max}$



Duraklama noktaları veya kritik noktası:

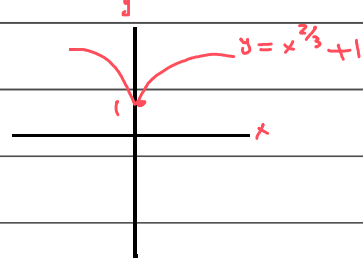
$$f'(c) = 0$$

* $x < 0$ için $f'(x) < 0$, $x > 0$ için $f'(x) > 0$, bu halde $x = 0$ bir yerel minimum

Halbuki $x = 0$ da türev yoktur yani $f'(0)$ mevcut değildir

örnek: $f(x) = x^{2/3} + 1$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow \text{kritik noktası}$$



örnek: $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ fonksiyonun kritik noktalar bulunuz, Bunlardan hangileri yerel ekstremum noktalarıdır?

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$0 = 15x^2(x^2 - 4) \Rightarrow x^2(x-2)(x+2) = 0$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$x = -2$ yerel maksimum

$x = 2$ yerel minimum

$x = 0$ kritik noktası ekstremum

nokta değildir

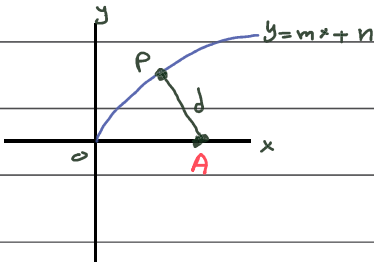
Teorim: f : Fonksiyonun (a, b) aralığında türevli, c noktası f fonksiyonunun bir duraklama noktası, $f''(c)$ mevcut ve sıfırdan farklı olsun

1) Eğer $f''(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum

2) Eğer $f''(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum

* Teorim: $A(x, y)$ ve $y = mx + n \Rightarrow$ uzaklığı formül hesapı

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$



örnek: $P(x, y)$ ve $A(\frac{5}{2}, 0)$

A noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını hesaplayınız

Türev

Çözüm: $A(\frac{5}{2}, 0)$ $p(x, \sqrt{x})$

$$d = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + x} \Rightarrow d^2 = (x - \frac{5}{2})^2 + x$$

$$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 + x$$

$$f'(x) = 2(x - \frac{5}{2}) + 1$$

en küçük yapan $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2 \quad f''(2) = 2 > 0$$

türev alıp

 $\Rightarrow x = 2$ fonksiyon en küçük değerini alır

$$\Rightarrow d = \sqrt{(2 - \frac{5}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Maksimum - Minimum problemleri:

örnek: Toplamları 40 olan iki pozitif tam sayının kareleri toplamı en fazla kaçtır?

1. adım 1. sayı 2. sayı
 x y 2. adım maksimum istenen $x^2 + y^2 = f(x)$ 3. adım $x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - x$
 $\Rightarrow f(x) = x^2 + (40 - x)^2$ 4. adım $x \in [1, 39]$ 5. adım Türev alıp $\Rightarrow f'(x) = 0 - 2x + 2(40 - x)$
 $\Rightarrow f'(x) = 0 = x - 40 + x$

$$2x - 40 = 0$$

$$x = 20$$

6. adım $f(x) = x^2 + (40 - x)^2$

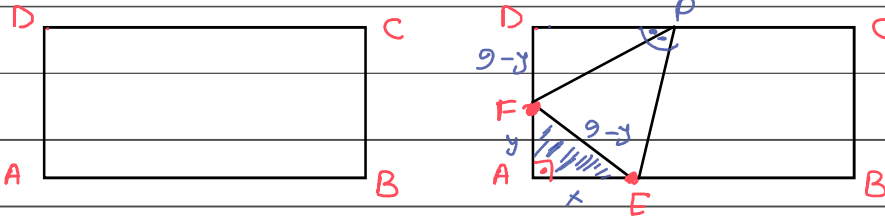
$$f(1) = 1 + (39)^2 = 1521$$

$$f(20) = 20^2 + 20^2 = 800$$

$$f(39) = 39^2 + 1^2 = 1521$$

7. adım En küçük değer 800 ve en büyük değer 1521

ÖRNEK : 9 cm eninde dikdörtgen şeklindeki bir kağıt şerit, şekildeki gibi D köşesi kıvrılarak [AB] kenarı üzerine getiriliyor. FAE üçgeninin alanı en fazla kaç cm^2 olabilir?



$$AE = x, FA = y$$

$$y^2 + x^2 = (9 - y)^2$$

$$y^2 + x^2 = 81 + y^2 - 18y$$

$$x^2 - 81 = -18y$$

$$y = \frac{-x^2 + 81}{18}$$

$$A(\triangle FAE) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

$$A = \frac{x}{2} \left(\frac{-x^2 + 81}{18} \right)$$

$$A = \frac{1}{36} (-x^3 + 81x)$$

$$A' = \frac{1}{36} (-3x^2 + 81) \Rightarrow A' = 0 = 81 - 3x^2 = 0$$

$$81 = 3x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 27$$

$$x = \pm 3\sqrt{3} \rightarrow \text{max için negatif alınamaz}$$

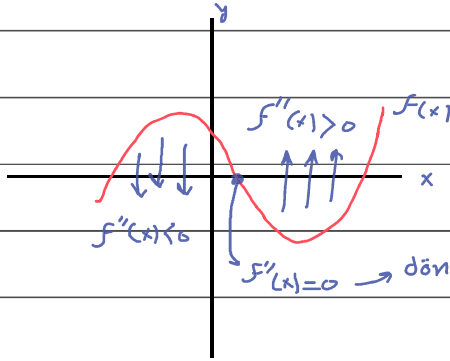
$$x = 3\sqrt{3}$$

$$A'' = -\frac{6x}{36} = -\frac{x}{6} \quad A'(3\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

olduğundan $x = 3\sqrt{3}$ maksimum vardır

$$A(3\sqrt{3}) = \frac{1}{36} (81 \cdot 3\sqrt{3} - 27 \cdot \sqrt{3}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

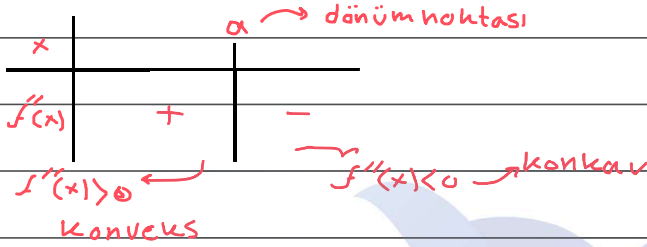
Türevin yorumu:



$f''(x) < 0$ eğriliğin yönü (içbükey) aşağı

$f''(x) > 0$ " " (dışbükey) yukarı

$f''(x) = 0 \rightarrow$ dönüm veya büküm noktası apısı



örnek: $f(x) = 3x^5 - 10x^3$ konveks ve konkav olduğu aralıkta bulunuz.

$$f'(x) = 15x^4 - 30x^2$$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x = 0 \Rightarrow 60(x)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f''(x)$	konkav	konveks	konkav	konveks	

$\Rightarrow [-1, 0] \cup [1, +\infty) \rightarrow$ konveks

$\Rightarrow (-\infty, -1] \cup [0, 1] \rightarrow$ konkav

örnek: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ konveks ve konkav olduğu aralıkta bulunuz

ve dönüm noktası varsa bulunuz.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	
$f'(x)$	konkav	6	konveks

$\Rightarrow (-\infty, 1] \rightarrow$ konkav

$[1, +\infty) \rightarrow$ konveks

$(1, 6) \rightarrow$ dönüm noktası

Belirsiz Farklar

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

L'Hospital Kuralı:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1) $\frac{0}{0}$ Belirsizlik Hali

örnek: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x^2 - 3x + 1} \Rightarrow \frac{0}{0}$ Belirsizlik

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{4x - 3} = \frac{1}{4 - 3} = 1$$

örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$

1. l'hospital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$

2. l'hospital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

örnek: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{x}{1+x^2}} = \frac{0}{0}$

l'hop $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}}{\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2+2x^2}{x^4 - x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(0) \cdot 1 = 1$$

2) $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizlik Hali : bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür.

ör: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = \frac{\infty}{\infty}$

l'hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}} = \frac{\cos x \cdot \tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$$

3) $0 \cdot \infty$ Belirsizlik Hali : $u \cdot v = \frac{u}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla $0 \cdot \infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$

örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = 0 \cdot \infty$

$$\Rightarrow (1 - \cos x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\sin x} \Rightarrow \text{l'hospital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Türev

4) $\infty - \infty$ Belirsizlik Hali: $u - v = \frac{1}{\frac{1}{u}} - \frac{1}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürülebilir.

örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x}) = \infty - \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{\sin x \cdot x} = \frac{0}{0}$$

l'hospital

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos x} - x \sin x - \cancel{\cos x}}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

2. l'hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x} = \frac{0+0}{1+1+0} = \frac{0}{2} = 0$$

5) 0^0 veya ∞^0 veya 1^∞

$y = [u(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln(y) = g(x) \cdot \ln(u(x)) \Rightarrow 0 \cdot \infty$ belirsizliğine sahip olur

$\ln y = \lambda \quad \text{ise} \quad \lim_{x \rightarrow a} y = e^\lambda$

örnek: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} = 0^0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(y) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(x) \cdot \ln(1 - e^x) = 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 - e^x)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

l'hospital

$$= \frac{-e^x}{1 - e^x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{-e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{1 - e^x}$$

2. l'hospital

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{1 - e^x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{-e^x} = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

$$\ln(y) = 0$$

$$\Rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} = 1$$

Diferansiyeller (yaklaşık değer):

$\sqrt{5}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz. veya $\ln(c) \dots$

$$\text{formül: } f(x+\Delta x) = f(x_0) + f'(x) \cdot \Delta x$$

1. adım formül yazınız

2. adım x_0 = en yakın tam kare bir sayı ve $x=5$

3. adım $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. adım $\Delta x = x - x_0$

5. adım değerler yerine koyuyoruz

örnek: $\sqrt{10}$ sayısının yaklaşık değeri bulunuz

$$\sqrt{10} \quad x=10, \quad x_0=9, \quad f(x)=\sqrt{x}, \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \Delta x=x-x_0=1$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x_0) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 1$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$$

örnek: $\sqrt[4]{17}$ sayısının yaklaşık değeri

$$x=17, \quad x_0=16, \quad \Delta x=1, \quad f(x)=\sqrt[4]{x}, \quad f'(x)=\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$$

$$x_0=16 \quad = \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}}$$

$$\Rightarrow = 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = 2 + \frac{1}{32} = \frac{65}{32}$$

örnek: $\arctan(0,99)$ yaklaşık değerini bulunuz

$$f(x)=\arctan x, \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad x=0,99, \quad x_0=1 \quad \Rightarrow \Delta x=-0,01$$

$$f(x+\Delta x) = \arctan(0,99) = \arctan x + \frac{-0,01}{x^2+1}$$

$$x_0=1-$$

$$= \arctan(1) - \frac{0,01}{1+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{200} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{200}$$

örnek: $\ln(2-(0,5)^2)$

$$x=0,5 \Rightarrow f(x)=\ln(2-x^2) \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{2-x^2} = \frac{-2x}{x^2-2}$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \Delta x=-0,5 \Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$= \ln(2-1) - \frac{1}{x^2-2} \cdot \frac{-2x}{x^2-2} = \ln(2-1) - \frac{1}{1-2} = 0 + 1$$

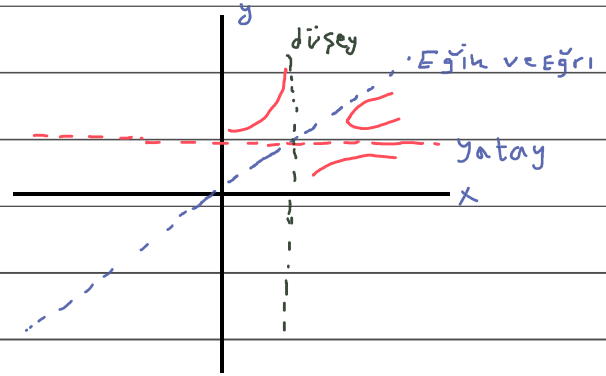
Eğri Çizimleri:

Asimptotlar:

1) dikey asimptot:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(a) \neq 0 \quad x = a \rightarrow \text{kritik noktası}$$

örnek: $y = \frac{x-5}{x+1}$ $x = -1$ dikey asimptot



2) yatay asimptot:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{sayı}$$

örnek: $y = \frac{x^2-5}{3x^2+5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5}{3x^2+5} = \frac{1}{3}$ yatay asimptot

$y = \frac{x^2-1}{x}$ $x=0$ dikey asimptot ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x} = \infty$ yatay yoktur

3) Eğik ve Eğri

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \frac{Q(x)}{R(x)}$$

$$Q(x) > R(x)$$

Eğer $P(x)$ polinom $ax+b$ biçiminde ise bu asimptot eğik

$$\deg[R(x)] = 1 \rightarrow \text{Eğik asimptot}$$

$$\deg[R(x)] > 1 \rightarrow \text{Eğri asimptot}$$

Bir eğriyi çizmek için şu yolu takip etmek yararlıdır:

1) T.k = Tanım kümesi bulunur

2) Asimptotlar bulunur

3) $x=a$ için $y=k$ kaçır

$y=0$ için $x=k$ kaçır

4) Türev alınıp işaret incelenir ve bazı sınırlar 2. Türev bulunmak gerekir

5) Değişim Tablosu yapılır

6) Tabloya göre çizim yapılır.

örnek: $y = x^4 - 8x^2$ eğrisini çiziniz.

1) $T:k = \mathbb{R}$

2) Asimptot yok

3) $x=0 \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow x^2(x^2-8)=0 \Rightarrow x_{1,2}=0$

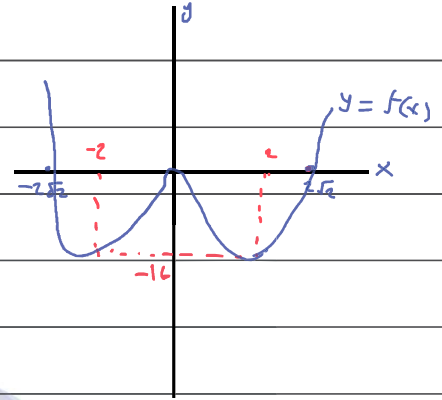
$x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$

4) $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 0$

$x_1=0, x_2=2, x_3=-2$

$y_1=0, y_2=16, y_3=-16$

5)	x	$-2\sqrt{2}$	-2	0	2	$2\sqrt{2}$
	y'	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
	y	-16	-16	0	16	16



örnek: $y = \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$ eğrisini çiziniz

$\rightarrow (x+1)^2$

1) $T:k = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $x=-1$ dikey asimptot $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^2+2x+1} = 1$ yatay asimptot

3) $x=0 \Rightarrow y=-4$

$y=0 \Rightarrow x_1=2, x_2=-2$

4) $y' = \frac{(x+1)(2x+8)}{(x+1)^4} \Rightarrow x=-4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

x	-4	-2	-1	0	2
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	0	$-\infty$	-4	0

